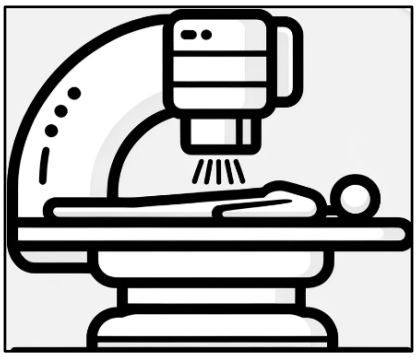
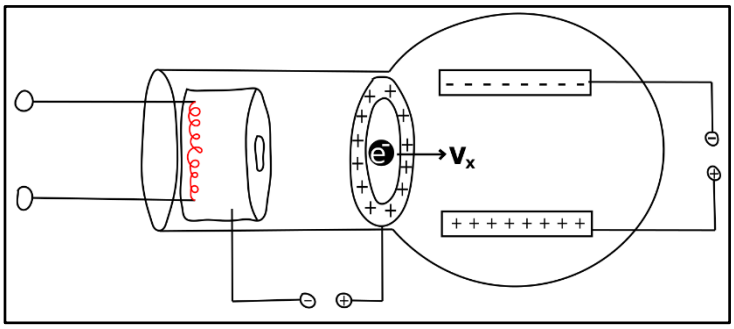
Arbeitsblatt – Teilchenbeschleuniger und relativistische Massenzunahme - Lösung

In der medizinischen Praxis kommt ein Teilchenbeschleuniger, bekannt als Linearbeschleuniger oder kurz Linac, zum Einsatz. Dieses Gerät erzeugt hochenergetische Röntgenstrahlen, indem es Elektronen auf extrem hohe Geschwindigkeiten beschleunigt.





Ihr kennt bereits andere Experimente, in denen Teilchen beschleunigt wurden z. B. bei der Elektronenablenkröhre. Bei allen Verfahren werden zunächst freie Elektronen erzeugt (z. B. durch den Glühelektrischen Effekt). Danach erhalten sie durch das Passieren einer Beschleunigungsstrecke ihre spezifische kinetische Energie E_{kin}. Bei der Elektronenablenkröhre ist die Geschwindigkeit v_x nach der Beschleunigung noch so gering, dass man die relativistische Massenzunahme vernachlässigen kann. Die Beschleunigungsspannung, die wir bei der Elektronenablenkröhre verwendet haben, war einfach zu gering. In klinischen Linearbeschleunigern (Linacs) werden durch unterschiedliche Beschleunigungstechniken kinetische Energien der Elektronen in der Größenordnung von mehreren MeV erreicht. In diesen Linearbeschleunigern werden wesentlich höhere Beschleunigungsspannungen eingesetzt, was eine relativistische Berechnung erforderlich macht. Für diese Berechnung lässt sich ableiten, dass die Endgeschwindigkeit der Elektronen am Ende der Beschleunigungsstrecke durch die Gleichung

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{\left(E_{\text{kin}} + E_0\right)^2}}$$

bestimmt wird. Die Ruheenergie E_0 wird berechnet durch

$$E_0 = m_0 \cdot c^2$$

Am Ende der Beschleunigungsphase besitzen die Elektronen eine bestimmte kinetische Energie E_{kin}.

a) Berechnen Sie die Endgeschwindigkeit der Elektronen nach der Beschleunigungsstrecke, vorausgesetzt, sie haben eine kinetische Energie von 5,0 MeV erhalten.

$$E_0 = m_0 \cdot c^2 = 9{,}109 \cdot 10^{-31}\,kg \cdot \left(299\,792\,458\,\frac{m}{s}\right)^2$$

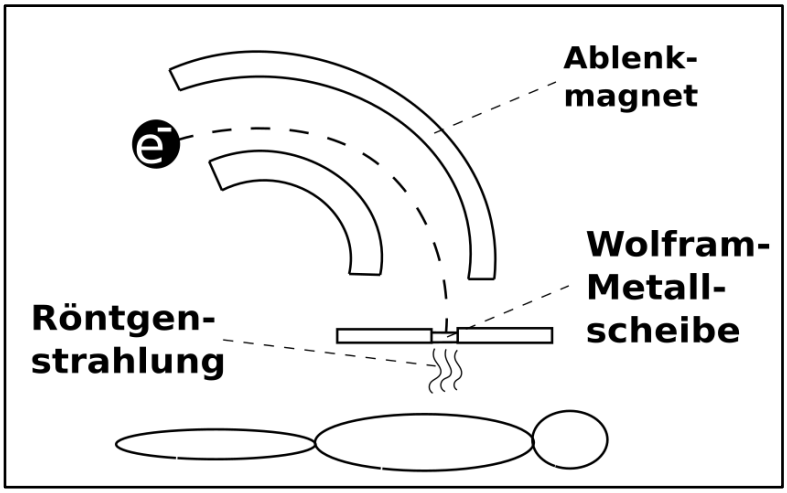
$$= 8{,}19 \cdot 10^{-14}\,J = \frac{8{,}19 \cdot 10^{-14}\,J}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,C} = 0{,}511\,MeV$$

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{(E_{kin} + E_0)^2}}$$

$$= 299\,792\,458\,\frac{m}{s} \cdot \sqrt{1 - \frac{(0{,}511\,MeV)^2}{(5{,}0\,MeV + 0{,}511\,MeV)^2}}$$

$$= 298\,500\,917\,\frac{m}{s}$$

Am Ausgang der Beschleunigungsstrecke des Linacs lenken speziell konzipierte Magnete die Elektronen wiederholt um. Dieser Prozess konzentriert und richtet den Elektronenstrahl präzise auf ein Ziel aus Wolframmetall. Beim Aufprall auf dieses Target entsteht dann die hochenergetische Röntgenstrahlung.



b) Nennen Sie die Ausrichtung des Magnetfeldes der Ablenkmagnete und erklären Sie, ob und wie diese Magnete die kinetische Energie der Elektronen beeinflussen.

Mithilfe der 3-Finger-Regel der linken Hand kann man die Ausrichtung des Magnetfeldes bestimmen. Die Elektronen bewegen sich nach rechts und die Lorentzkraft zeigt zum Mittelpunkt der Kreisbahn. Somit zeigt das Magnetfeld in das Bild hinein.

Weil die von den Elektromagneten erzeugte Lorentzkraft stets senkrecht zur Bewegungsrichtung der Elektronen wirkt, ändert sich der Betrag ihrer Geschwindigkeit nicht; es erfolgt nur eine Änderung ihrer Bewegungsrichtung. Daher bleibt die kinetische Energie der Elektronen unverändert.

Beim Ablenkmagneten wird deutlich, dass die Elektronen einen Kreisbogen durchlaufen. Der Radius dieser Bahn im Magneten beläuft sich auf r = 50 cm.

c) Leiten Sie die Formel

$$B = \frac{m_0 \cdot v}{e \cdot r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

für die Stärke des magnetischen Feldes B her.

$$F_Z = F_L$$

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = e \cdot v \cdot B$$

$$B = \frac{m \cdot v}{e \cdot r} \qquad \left(m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$B = \frac{m_0 \cdot v}{e \cdot r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$